

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.201
CLASA A IX-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE

Subiectul 1.

- a) Arătați că $n^4 > (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$, unde n este un număr natural nenul.....2p
- b) Calculați $[S]$, unde $S = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{2016^4}$, unde $[S]$ reprezintă partea întreagă a lui S5p

Prof. Drugan Constantin, Constantinescu Dragoș
C.N. „Alexandru Lahovari”, Rm. Vâlcea

Barem :

- a) După calcule se ajunge la $2 \cdot n^2 + n > 2$, $n \geq 1$ evident.....2p
- b) Din a) avem că $\frac{1}{n^4} < \frac{1}{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1)}$
- $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n} - \frac{1}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)} \right)$, $n \geq 3$, natural2p
- Avem $1 < S = \sum_{k=1}^{2016} \frac{1}{k^4} < 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2015 \cdot 2016 \cdot 2017} \right)$ 2p
- $1 < S < 2$, deci $[S] = 1$1p

Subiectul II

- a) Arătați că în orice triunghi ABC are loc relația $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului, iar H este ortocentrul triunghiului.....3p.
- b) Fie ABCD un patrulater înscris în cercul de centru O și care are diagonalele AC și BD perpendiculare. Dacă H_1 și H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor ACD și ABC, arătați că $\overrightarrow{BH_2} = \overrightarrow{DH_1}$ 4p

Prof. Drugan Constantin, Constantinescu Dragoș

C.N. „Alexandru Lahovari”, Rm. Vâlcea

Barem :

- a) Relația este binecunoscuta relație a lui Sylvester.
Luăm cazul unui triunghi oarecare ABC, D este diametral opus lui A în cercul circumscris și P este mijlocul laturii BC1p
Patrulaterul BHCD are laturile opuse paralele deci este paralelogram, atunci diagonala HD și latura BC au același mijloc P. Cum, în triunghiul AHD
 $\overrightarrow{AH} = 2 \cdot \overrightarrow{OP}$ iar $OB = OC$ avem $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2 \cdot \overrightarrow{OP}$ 1p
 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$ deci $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ 1p
- b) Aplicăm relația lui Sylvester pentru triunghiurile ACD și ABC1p
 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OH_1}$ respectiv $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH_2}$ 1p
 $\overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$, deci $\overrightarrow{H_2H_1} = \overrightarrow{BD}$ 1p
Cum punctele B, D, H_1 și H_2 sunt pe aceeași dreaptă rezultă concluzia.....1p

Subiectul III

- a) Câte progresii aritmetice de numere naturale există cu primul termen 1 și care conțin numărul 45001 ?.....2p
- b) Arătați că nu există progresii aritmetice neconstante de numere naturale cu toți termenii pătrate perfecte.....5p

Prof. Drugan Constantin, Constantinescu Dragoș

C.N. „Alexandru Lahovari”, Rm. Vâlcea

Barem :

- a) Fie (a_n) o progresie aritmetică cu primul termen 1 și care conține numărul 45001. Atunci $45001 = 1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow (n-1) \cdot r = 45000$, deci r este divizor al lui 45000.....1p

$$45000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4. \text{ Deci } r = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^k, i = \overline{0,3}, j = \overline{0,2}, k = \overline{0,4}$$

r poate lua $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ de valori, adică sunt 60 de progresii.....1p

- b) Presupunem prin absurd că (a_n) este o progresie aritmetică în care toți termenii sunt pătrate perfecte. Atunci există șirul strict crescător

(x_n) , cu $a_n = x_n^2$ unde n este nr. natural nenul2p

Cum $x_{n+1}^2 - x_n^2 = r$ avem $x_{n+1} - x_n \geq 1 \Rightarrow r = (x_{n+1} - x_n) \cdot (x_{n+1} + x_n) \geq 2 \cdot x_n$ 2p

Rezultă că șirul (x_n) este mărginit, fals deoarece (a_n) nu este mărginit.....1p

Subiectul IV.

Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Demonstrați că :

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{a^2}{(b+c)^4} + \frac{b^2}{(a+c)^4} + \frac{c^2}{(a+b)^4} \geq \frac{3}{2}.$$

G.M. Nr 5/2015

Barem :

Se pleacă de la $a^2 + \frac{a^2}{(b+c)^4} \geq \frac{2 \cdot a^2}{(b+c)^2}$ și se obține2p

$$\sum a^2 + \sum \frac{a^2}{(b+c)^4} \geq 2 \cdot \sum \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \text{1p}$$

Aplicăm inegalitatea C.B.S. și obținem

$$\sum \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \geq \frac{1}{3} \cdot \left(\sum \frac{a}{b+c} \right)^2 \text{2p}$$

Cum $\sum \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$ este o inegalitate cunoscută1p

Se obține inegalitatea cerută.....1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 21.02.201

CLASA A X-A

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE

SUBIECTUL I

a) Să se rezolve ecuația $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$.

b) Dacă $x \in [2, \infty)$ să se calculeze $\left[\log_{[x]} x \right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a .

Soluție:

a) $9^{\log_2 x} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - 3^{\log_2 x}$ 1p

Notăm $3^{\log_2 x} = t, t > 0, x > 0$. Ecuația devine $t^2 = x^2 \cdot t - t$ 1p

$3^{\log_2 x} = x^2 - 1$ 1p

Soluție unică $x = 2$ 1p

b) Fie $[x] = k, k \in \mathbb{N}^* / \{1\}$

$k \leq x < k+1 \Leftrightarrow k \leq x < k^2$ 1p

$\log_{[x]} k \leq \log_{[x]} x < \log_{[x]} k^2 \Leftrightarrow 1 \leq \log_{[x]} x < 2$ 1p

Finalizare $\left[\log_{[x]} x \right] = 1$ 1p



SUBIECTUL II

Să se rezolve ecuația $2\sqrt[3]{2x-1} = x^3 + 1$.

Soluție:

Notăm $\sqrt[3]{2x-1} = t$ și avem că $t^3 = 2x - 1$ 1p

$2t = x^3 + 1 \Leftrightarrow x^3 = 2t - 1$ 1p

$t^3 - x^3 = 2x - 2t$ 1p

$x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 4p



SUBIECTUL III

Numerele distincte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ au modulele egale. Considerăm numerele $a = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}, b = \frac{z_2 + z_3}{z_2 - z_3},$

$c = \frac{z_3 + z_1}{z_3 - z_1}$. Să se arate că dacă $a^2 + b^2 + c^2 = -1$ atunci $a = b = c$.

Soluție:

$\bar{a} = -a; \bar{b} = -b; \bar{c} = -c$ 2p

a, b, c sunt numere complexe pur imaginare 1p

$a = ix; b = iy; c = iz$ 1p

$\left(\frac{1+ix}{-1+ix} \right) \left(\frac{1+iy}{-1+iy} \right) \left(\frac{1+iz}{-1+iz} \right) = 1$ 2p

Deoarece $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ și $xy + yz + zx = 1$ rezultă că $x = y = z$, adică $a = b = c$ 1p

SUBIECTUL IV

Determinați numerele $a, b, c \in [-2, 2]$ cu $a \leq b \leq c$ și $n \in \mathbb{N}^*$

știind că $a + b + c = -3$, $a^3 + b^3 + c^3 = -15$, $a \leq b \leq c$ și $a^n + b^n + c^n = 8n + 1$.

Soluție:

Considerăm numerele reale x, y, z a.î. $\sin x = \frac{a}{2}$, $\sin y = \frac{b}{2}$, $\sin z = \frac{c}{2}$.

$$a + b + c = -3 \Leftrightarrow \sin x + \sin y + \sin z = -\frac{3}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = -15 \Leftrightarrow \sin^3 x + \sin^3 y + \sin^3 z = -\frac{15}{8} \dots\dots\dots 1p$$

$$\sin 3x + \sin 3y + \sin 3z = 3(\sin x + \sin y + \sin z) - 4(\sin^3 x + \sin^3 y + \sin^3 z) = 3 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Cum } \sin 3x, \sin 3y, \sin 3z \in [-1, 1] \text{ rezultă că } \sin 3x = \sin 3y = \sin 3z = 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$\sin 3x = 1 \Leftrightarrow 4\sin^3 x - 3\sin x + 1 = 0 \text{ cu soluțiile } \sin x = -1, \sin x = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Deci } a, b, c \in \{-2, 1\} \text{ și din condițiile impuse avem că } a = b = -2 \text{ și } c = 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$a^n + b^n + c^n = 8n + 1 \Leftrightarrow (-2)^n = 4n \text{ cu soluția unică } n = 4 \dots\dots\dots 1p$$

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.201
CLASA A XI-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE

SUBIECTUL I

Determinați matricea $A \in M_3(C)$, dacă $A^* = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

G.M. 12/2015

Soluție:

Scrie relația $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$, $\det A \neq 0$, iar $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* \dots\dots\dots(1p)$.

Justifică A^* inversabilă, $\det A^* = 324$, și calculează inversa sa $(A^*)^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots(3p)$.

Arată că $A = (\det A) \cdot (A^*)^{-1} \dots\dots\dots(1p)$.

Arată $\det A^* = (\det A)^2$, $\det A = \pm 18 \dots\dots\dots(1p)$. Finalizare

$A = \pm \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1p)$.

SUBIECTUL II

Se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+ka & ka \\ a & 1+a \end{pmatrix}, a \in C^*, k \in N^*$. Să se calculeze $(X(a))^n, n \in N^*$

prof. Dicu Florentina, Rm. Vâlcea

Soluție:

Scrie $X(a) = \begin{pmatrix} 1+ka & ka \\ a & 1+a \end{pmatrix} = I_2 + aA, A = \begin{pmatrix} k & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, k \in N^*$ **(1p).**

Calculează $A^2 = (k+1) \begin{pmatrix} k & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (k+1)A$, iar apoi

$$X(a) \cdot X(b) = I_2 + aA + bA + (k+1)abA = X((k+1)ab + a + b)$$

$$X(a) \cdot X(b) = X\left((k+1)\left(a + \frac{1}{k+1}\right)\left(b + \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{k+1}\right) \text{(3p).}$$

$$\text{Deci } (X(a))^2 = X\left((k+1)\left(a + \frac{1}{k+1}\right)^2 - \frac{1}{k+1}\right), (X(a))^3 = X\left((k+1)^2\left(a + \frac{1}{k+1}\right)^3 - \frac{1}{k+1}\right) \text{(1p).}$$

$$(X(a))^n = X\left((k+1)^{n-1}\left(a + \frac{1}{k+1}\right)^n - \frac{1}{k+1}\right) \text{(1p).}$$

Finalizare inducție matematică **(1p).**



SUBIECTUL III

Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin

$$x_0 = 0$$

$$x_n = 1 + \sin(x_{n-1} - 1), (\forall) n \geq 1$$

Studiați convergența șirului și apoi determinați limita sa.

Soluție:

Cum $x_n - 1 = \sin(x_{n-1} - 1), (\forall) n \geq 1$ (1p).

Dacă notăm $a_n = x_n - 1, (\forall) n \geq 1$, atunci $a_n = \sin a_{n-1}, (\forall) n \geq 1$ (1p).

Deoarece $a_0 = -1$, deducem că $a_n < 0, (\forall) n \geq 1$ (1p)

$(a_n)_{n \geq 0}$ este crescător..... (1p).

Deci convergent și există limita sa $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}$ (1p).

Rezultă $a = \sin a$, (1p).

Deci $a = 0$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ (1p).

SUBIECTUL IV

Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x \cos 2x \cos 4x \dots \cos 2^n x}{(x - \pi)^2}$

prof. Dicu Florentina, Rm. Vâlcea

Soluție:

$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x \cos 2x \cos 4x \dots \cos 2^n x}{(x - \pi)^2}$ se găsește în cazul de nedeteminare $\frac{0}{0}$ (1p).

Se face substituția $y = x - \pi, y \rightarrow 0$ și limita devine $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y \cos 2y \cos 4y \dots \cos 2^n y}{y^2}$...(1p).

La numărător facem artificiu de calcul:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y \cos 2y \cos 4y \dots \cos 2^n y}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y + \cos y - \cos y \cos 2y \cos 4y \dots \cos 2^n y}{y^2} =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos y (1 - \cos 2y \cos 4y \dots \cos 2^n y)}{y^2} = \dots = \sum_{k=0}^n \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2^k y}{y^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^n \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2^{k-1} y}{y^2} = \sum_{k=0}^n \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2^{k-1} y}{(2^{k-1} y)^2} \cdot \frac{2^{2k-2} y^2}{y^2} = 2 \sum_{k=0}^n \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2^{2k-2} y^2}{y^2} = 2 \sum_{k=0}^n 2^{2(k-1)} = \dots (2p).$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n 2^{2k} = \frac{2^{2n+2} - 1}{2 \cdot 3} = \frac{2^{2n+2} - 1}{6} \dots (1p).$$

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 21.02.201

CLASA A XII-A

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE

Subiectul I

Fie în $M_3(\mathbb{R})$ matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și pentru fiecare $t \in \mathbb{R}/\{0\}$ definim matricea

$$M_t = \frac{t}{3}A + \frac{1}{3t^2}B.$$

1. Să se arate că mulțimea de matrice $G = \{M_t | t \in \mathbb{R}/\{0\}\}$ este un grup în raport cu înmulțirea matricelor.
2. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow G, f(t) = M_t$ este un izomorfism de grupuri.

(Problemă de admitere facultatea de matematică)

Soluție:

Verificăm că mulțimea G este parte stabilă, dacă t și u sunt reale nenule avem

$$M_t M_u = \left(\frac{t}{3}A + \frac{1}{3t^2}B \right) \left(\frac{u}{3}A + \frac{1}{3u^2}B \right) = \frac{tu}{9}A^2 + \frac{u}{9t^2}BA + \frac{t}{9u^2}AB + \frac{1}{9t^2u^2}B^2 = \frac{tu}{3}A + \frac{1}{3t^2u^2}B = M_{tu}$$

Deoarece avem $A^2 = 3A, AB = BA = 0, B^2 = 3B$. Rezultă parte stabilă. Din $M_t = M_u$ obținem $t = u$ și cu aceasta deducem că $I_3 = M_1$ este element neutru, iar simetricul lui M_t este $M_{\frac{1}{t}}$, deci G cu înmulțirea este grup comutativ.....(5p)

Din partea stabilă deducem că f este morfism și demonstrăm injectivitatea și surjectivitatea.....(2p)



Subiectul II

Fie (G, \cdot) și $a, b \in G$ diferite cu proprietățile $a \neq e, b \neq e, a^7 = e, aba^{-1} = b^2$ unde e este elementul neutru al grupului G . Să se determine ordinele elementelor a și b .

Soluție:

Avem ordinul lui a egal cu 7. Folosind relațiile $ab = b^2a, a = b^2ab^{-1}$ demonstrăm prin inducție matematică

$a^k = b^{2^k} a^k b^{-1}$ pentru orice k natural.....(4p)

Luăm $k=7$ și obținem $b^{2^7-1} = e \Rightarrow b^{127} = e$(2p)

Deci ordinul lui b este 127 (număr prim).....(1p)

Subiectul III

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} k + \sin x \cdot \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$ și

$$J_n = \int_{-\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[n + \left(\frac{1}{n} - n \right) \chi(x) \right] \cdot f(x) dx, \chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases} \text{ Determinați } k \text{ astfel încât } \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 12.$$

Gorgotă Vasile și Ulmeanu Sorin

Soluție:

$$\text{Scriem } f(x) = k + \begin{cases} \sin x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = k + g(x). \dots\dots\dots (2p)$$

Deoarece funcția g este impară avem

$$J_n = \int_{-\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[n + \left(\frac{1}{n} - n \right) \chi(x) \right] \cdot f(x) dx = \int_{-\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[n + \left(\frac{1}{n} - n \right) \chi(x) \right] (k + g(x)) dx =$$

$$\int_{-\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[n + \int_{-\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[n + \left(\frac{1}{n} - n \right) \chi(x) \right] k dx = knx \left|_{-\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}} + \int_{-\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[\left(\frac{1}{n} - n \right) \chi(x) \right] k dx = 2k^2 + \right.$$

$$\left. k \left(\frac{1}{n} - n \right) \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dx = 2k^2 - 2k + \frac{2k}{n^2} \right.$$

Obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 2k^2 - 2k = 12$ de unde se obține $k_1 = 3$ și $k_2 = -2$. $\dots\dots\dots (5p)$

Subiectul IV

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea $e^{f(x)} + f(x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Să se arate că $\int_1^{e+1} f(x) dx \leq \frac{3}{2}$.

Florin Nicolaescu-G.M.11\2015

Soluție:

Considerăm funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^x + x$ bijectivă.....(2 p)

Deci ipoteza se scrie $g(f(x)) \leq x \Leftrightarrow f(x) \leq g^{-1}(x)$ - argumentare.....(1 p)

Prin integrare avem

$$\int_1^{e+1} f(x) dx \leq \int_1^{e+1} g^{-1}(x) dx (1)$$

Dar identitatea Young avem $\int_0^1 g(x) dx + \int_1^{e+1} g^{-1}(x) dx = e + 1$ (2p)

Obținem $\int_1^{e+1} g^{-1}(x) dx = \frac{3}{2}$ (2). Din (1) și (2) se obține ce se cerea demonstrat.....(2 p)